EXERCISE ONE

作业*3/28*课堂交纸版。上机作业交电子版*4/4*前到邮箱。

带***部分题本科生选做，研究生必做, 附加题供参考,可以加分

1. (傅立叶变换)

   a: 设方形脉冲$Rec(t) = 1, -0.5 \le t \le 0.5$,其他值为零。计算$Rec(t) * Rec(t)$. 并计算结果(三角形脉冲）的傅里叶变换。

   b: 傅里叶变换的对称性：证明实的奇函数的傅里叶变换是奇函数，偶函数也是一样.

   c: 证明：傅立叶变换的对偶性：记f的傅立叶变换为$F = \widehat{f}$,则F的傅立叶变换$\widehat{F} = 2\pi f(-t)$,

   d: 计算$\frac{\sin x}{x}$的傅立叶变换。(可以利用c)

   e: ***证明:$\int_{-\infty}^{\infty}(\sin t/t)^2 dt = \pi$ (可利用傅里叶变换逆定理)

2. (傅立叶级数) 设$f(t) = 1, 0 \le t \le 1, f(t) = -1, -1 \le t < 0$.其他为零。

   a: 计算$f(t)$的傅立叶变换。

   b: 计算其生成的周期为2的奇方波f_2的傅立叶级数;

   c: 说明傅里叶系数和傅里叶变换的关系 $\widehat{f}(n) = 1/T\widehat{f}(n/T)$,其中$T$是周期。

   d: 特别计算$f(x)$的能量（L_2范数)和 f_2的傅立叶系数的能量（l_2范数).

   e: ***把1.a中的三角脉冲函数$Tri(t)$,拓展为周期为2的函数$Tri_2(t)$,利用其傅里叶级数展开计算 $\sum_{n\ge 1} 1/n^2$.

3. (系统)

   a: 验证积分算子是LTI，因果系统，不是BIBO稳定系统.

   b: 验证移动平均算子$y(t) = 1/T\int_{t-T/2}^{t+T/2} x(s)ds$是LTI，BIBO稳定系统，不是因果系统.

   c: 利用任意LTI系统是卷积系统，即$H(x(t)) = h(t) * x(t)$. 证明:

   如果单位响应信号满足$h(t) = 0, t \le 0$(称为因果信号),则系统是因果系统。

   d: 类似如果单位响应信号满足$\int |h(t)| < \infty$, 则系统是BIBO稳定系统。(输入有界，输出有界).

   e: ***验证: 指数函数e^{ist}是任一卷积算子和平移算子($T_a(x(t)) = x(t-a)$)的特征向量。 即任意$h(t) * e^{ist} = \lambda_1(s)e^{ist}$, $T_a(e^{ist}) = \lambda_2(s)e^{ist}$,其中$s$为固定参数，$t$为变量。

4. (Hilbert Spaces)

   a: 给出复函数l^2空间的内积并验证。

   b: 给出复函数l^2空间的两组正交基，***并说明其是Hilbert空间.

c: 验证任意复内积满足公式

$< x, y >= \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2 + i|x+iy|^2 - i|x-iy|^2)$

d: 利用$\delta(t)$的定义，证明 $x(t)\delta(t-a) = x(a)\delta(t-a)$

e: ***利用$\delta(t)$的傅里叶变换，给出$cos(2\pi t)$的傅里叶变换.

5. ***附加题***

a: 证明：Gauss 密度函数的傅里叶变换是它本身.

b: 证明傅里叶变换的乘积公式。$\widehat{x \cdot y} = \widehat{x} * \widehat{y}$

c: 验证微分法则 $f'(x) \to 2\pi\imath\xi\hat{f}(\xi)$。

给定微分方程$u'' + a^2 u = f(t)$,已知当$f(t) = \delta(t)$时，得到基本解$G(t) = e^{-a|t|}/(2a)$.

证明：给定任意函数$f(t)$的解为$G(t) * f(t)$.

注：方程进行傅立叶变换，利用$\delta(t)$的傅里叶变换为1。

d: (Dirac comb) 定义$\triangle_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$, 则 Dirac comb是离散的周期序列. 证明其傅立叶展开为

$\triangle_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inWt}$.

进一步利用e^{inWt}的傅立叶变换$2\pi\delta(x - nw)$, 证明 Dirac comb的傅立叶变换是

$\widehat{\triangle_T(t)} = W\triangle_W(w)$,其中$W = 2\pi/T$.

e: 对于一个简单正弦波，给出其抽样重构公式，说明采样率必须严格大于奈奎斯特率 信号的频率(奈奎斯特率)

上机作业MATLAB

每次作业要求上交一个M文件(其中每道题是一个函数), 可以用注释或另外的一个README文件说明.

1. (信号的生成)

   A:试生成一个抽样频率为$8k$的信号序列，比如Matlab的Sinc波 $Sinc$或任何函数x^2等，说明它是否是声音，可用sound函数。 B：编一首你喜欢简单的曲目，利用sound演示。

   C: 读取一个图像并显示;

   D: 利用矩阵操作改变图像的像素，显示改变的结果。

2. (信号的运算) 选取任意信号，比如钢琴中央C键。

   A: 给出信号的时间延迟为1秒的对应信号。注意：不是$y(n) = x(n-1)$.

   B: 给出信号伸缩($\lambda = 2$)的信号；

   C: 给出信号和Sinc波的乘积信号，卷积信号(利用conv);

   D: 说明A,B,C中信号的变化。可以用sound, 或fft。

3. (信号的调制）任选低频信号$x(t)$，比如钢琴中央C键。

   A:利用高频信号(比如8Mhz),得到调制信号$y(t) = x(t)\cos w_0 t$

   B:利用同样高频信号解调制，$z(t) = y(t)\cos w_0 t$

   C:*** 利用低通滤波器回复信号$x(t) = H(z(t))$.

   D:实现以上过程，并演示(sound or fft).

4. 学习并使用fft,ifft, 用于声音和图像。

5. (模拟演示时域的抽样定理)

   A: 构造一个频率有限的信号(可取若干个正弦信号的和)

   B: 使用三种抽样频率(Nyquist频率,过抽样和欠抽样频率)进行抽样， 。利用sound说明信号的变化，给出对应信号的频谱(fft),并比较.

   C: 说明并构造混叠现象。

   D: ***尝试从抽样信号恢复原信号(可以用滤波器filter)；